國立臺灣大學99學年度碩士班招生考試試題

1. 假設函數 $f(t)=t\exp(-t)$

   【問題 1】求極值及反曲 (inflection)點。（5 分）

   【問題 2】分別列出在 $t=0$ ，極值及反曲點之二次項逼近式。（10 分）

   【問題 3】上述何點其逼近式為線性式。（5 分）

2. 在藥物接觸細胞接受器使細胞吸收該藥物量之過程中，若停留在每一接受器時間愈久，則藥物量進入細胞愈多，藥物吸收量愈大，但接觸接受器次數減少；但如每次停留時間短，雖然接觸接受器次數增加，循環時間也會增加。若兩次接受器間之循環時間為 1 分鐘，而藥物吸收量(y)與停留時間(x)之函數為 $y=G(x)=1-\exp(-x)$ 。

   【問題 1】求每單位時間藥物吸收量。（5 分）

   【問題 2】以牛頓逼近式法示範如何求 x 極值以得到最大藥物吸收量。（10 分）

3. 若隨機變數 X 為一指數分布，其機率密度函數為 $\exp(-\lambda x)$ ，請利用 Delta method 求出 $f(X)=\exp(-X^2)$的近似期望值與近似變異數。（10 分）

4. 考慮一線性迴歸模式為 $\mathbf{Y}=\mathbf{X\beta}+\varepsilon$（之後稱為完整模式），其中 Y 為一個 $n\times 1$ 的向量，$\mathbf{X}$ 為一個 $n\times p$ 的矩陣且 $rank(\mathbf{X})=p<n$ ，$\mathbf{\beta}$ 為一個 $p\times 1$ 的向量，ε 為 $n\times 1$ 的向量。若 $\mathbf{\beta}$ 與 $\mathbf{X}$ 可被分割為 $\mathbf{\beta}=(\mathbf{\beta}_1',\mathbf{\beta}_2')'$ 與 $\mathbf{X}=(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2)$ ，在此 $\mathbf{\beta}_1$ 、 $\mathbf{\beta}_2$ 分別為 $k\times 1$、$(p-k)\times 1$ 的向量 $(k<p)$，$\mathbf{X}_1$、$\mathbf{X}_2$ 分別為 $n\times k$ 、$n\times(p-k)$ 的矩陣，且 $\mathbf{\beta}_1'$ 和 $\mathbf{\beta}_2'$ 代表 $\mathbf{\beta}_1$ 和 $\mathbf{\beta}_2$ 的轉置向量(transposed vector)，則 $\mathbf{Y}=\mathbf{X}_1\mathbf{\beta}_1+\varepsilon_1$ 稱為簡化模式。考慮完整模式 $\mathbf{Y}=\mathbf{X\beta}+\varepsilon$ 與簡化模式 $\mathbf{Y}=\mathbf{X}_1\mathbf{\beta}_1+\varepsilon_1$ 的誤差平方和(sums of squared errors，簡稱為 SSE)的差值為

   $SSE(\mathbf{X}_1)-SSE(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2)=(\mathbf{Y}-\mathbf{X}_1\hat{\mathbf{\beta}}_1)'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}_1\hat{\mathbf{\beta}}_1)-(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\hat{\mathbf{\beta}})'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\hat{\mathbf{\beta}})$ ，

   在此 $\hat{\mathbf{\beta}}=(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$ 且 $\hat{\mathbf{\beta}}_1=(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\mathbf{Y}$ 。令 $\mathbf{X}_{2*}=(\mathbf{I_n}-\mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1')\mathbf{X}_2$ 且 $\mathbf{I}_n$ 為一個 $n\times n$ 的單位矩陣(identity matrix)。

   請驗證此等式 $SSE(\mathbf{X}_1)-SSE(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2)=\mathbf{Y}'\mathbf{X}_{2*}(\mathbf{X}_{2*}'\mathbf{X}_{2*})^{-1}\mathbf{X}_{2*}'\mathbf{Y}$ 是否成立？（20 分）

見背面

5. 一個翻牌遊戲以 5 張正面依序編有 1 至 5 數字的紙牌進行，遊戲規則如下：
   (i) 遊戲開始時先將 5 張紙牌全部翻成無數字的背面。
   (ii) 參與遊戲者投擲一枚公正骰子，若出現點數 4、5 或 6，就將第一張牌翻至正面，若出現點數 1、2 或 3，則不翻動。
   (iii)重複(ii)的動作，將其餘四張牌翻至正面，或維持背面。
   (iv)將出現正面的數字取和，作爲輸贏的依據。

【問題 1】將一位遊戲者所可能得到 5 張紙牌數字的排列情形全部列出。(註：以 0 代表牌面爲背面)(10 分)

【問題 2】以 T 表示 5 張牌的數字總合，計算每一個 T 的分數的發生機率。(10 分)

【問題 3】若定輸贏的比例是 1：1，則遊戲規則應如何定立？(8 分)

【問題 4】若輸贏的規則爲 T 的數值爲 0、1、14 或 15，遊戲者獲勝，則贏面的機率爲多少？(7 分)