

I、個案研究 (每格 2 分，共 50 分。請按空格編號，依序作答。若沒有適當答案，請填寫無解。)

- 欲探討 A、B 兩種不同促銷方式對營收的影響，以顯著水準  $\alpha = 0.05$  檢定兩營收分配之中位數  $\eta_A$ 、 $\eta_B$  的情況。隨機抽出同一集團的 60 家超商，進行完全隨機實驗設計，得採用不同方式促銷之各 30 家超商的月營收分別為  $Y_{ij}$ ， $i = A, B$ ， $j = 1, 2, \dots, 30$ 。經電腦求得下列部份報表為：

ANOVA 之 F 檢定

已解釋變異	SSR
未解釋變異	SSE
檢定統計量 F	$F_0$
機率值	P-value=0.034

t 檢定

A 促銷方式	B 促銷方式
平均數 $\bar{Y}_A = 66.03$	平均數 $\bar{Y}_B = 56.17$
不偏變異數 $S_A^2 = 333.4126$	不偏變異數 $S_B^2 = 285.3851$
檢定統計量 $t = t_0$	

Mann-Whitney-Wilcoxon 檢定

A 促銷方式 Rank Sum	$R_A = 1069$
檢定統計量 Z	$Z_0$
機率值(two-tail)	P-value=0.0228

Kruskal-Wallis 檢定

A 促銷方式 Rank Sum	$R_A = 1069$
檢定統計量 H	$H_0$
自由度 v	$v_0$

- 設兩營收之母體分配皆為常態分配，則依一因子分類之 ANOVA 的 F 檢定，可求得檢定統計量  $F = F_0 =$  (1) 與臨界值 4.0 作比較，而拒絕虛無假設  $H_0: \eta_A = \eta_B$ 。
- 設兩母體皆為常態分配，依兩變異數相等之 t 檢定，可求得統計量  $t = t_0 = +$  (2)，因機率值  $= p =$  (3)  $< \alpha = 0.05$ ，而拒絕虛無假設  $H_0: \eta_A \leq \eta_B$ ，此 t 檢定所需之自由度  $v =$  (4)。
- 設兩母體皆為常態分配，依兩變異數相等之 t 檢定的基礎作估計，可求得  $\eta_A - \eta_B$  的 95% 信賴區間為：(5)  $\leq \eta_A - \eta_B \leq$  (6)，經作比較而拒絕虛無假設  $H_0: \eta_A = \eta_B$ 。
- 依 Mann-Whitney-Wilcoxon 檢定，則可求得檢定統計量為正數之  $Z = Z_0 = +$  (7)，因機率值  $= p =$  (8)  $> \alpha = 0.05$ ，而不拒絕虛無假設  $H_0: \eta_A \geq \eta_B$ 。
- 依 Kruskal-Wallis 檢定，可求得檢定統計量  $H = H_0 =$  (9)，因機率值  $= p =$  (10)  $< \alpha = 0.05$ ，而拒絕虛無假設  $H_0: \eta_A = \eta_B$ 。
- 依 Dunn 比較法，則可求得檢定統計量  $|D| =$  (11) 大於可能誤差  $e =$  (12)，而拒絕虛無假設  $H_0: \eta_A = \eta_B$ 。
- 為探討 A、B 兩種不同包裝商品與銷售量的關係，乃隨機抽出 30 家超商，進行一因子分類集區實驗設計，得各種不同包裝商品在 30 家超商的銷售量分別為  $Y_{ij}$ ， $i = A, B$ ， $j = 1, 2, \dots, 30$ 。
  - 以顯著水準  $\alpha = 0.05$  檢定，A、B 包裝商品之銷售量分配的中位數  $\eta_A$ 、 $\eta_B$  是否相等？
    - ◆ 設兩銷售量之母體分配皆為常態分配，則依未重複之二因子分類 ANOVA 的 F 檢定，可求得已解釋變異  $SSR = 138.93$ 、未解釋變異  $SSE = 549.90$ ，檢定統計量  $F =$  (13) 與臨界值 4.18 作比較，而拒絕虛無假設  $H_0: \eta_A = \eta_B$ 。若改依 t 檢定，可求得檢定統計量  $t =$  (14) 與臨界值  $=$  (15) 作比較而有相同結論，此 t 檢定所需之自由度  $v =$  (16)。
    - ◆ 已知差額  $D_j = Y_{Aj} - Y_{Bj}$  中有 22 個為正的，沒有為 0 的，則依符號檢定，可求得檢定統計量  $Z =$  (17) 與臨界值 1.96 作比較，而拒絕虛無假設  $H_0: \eta_D = 0$ 。若改依 Friedman 檢定，可求得 A、B 銷售量等級和  $R_A =$  (18) 及  $R_B$ ，檢定統計量  $\chi_r^2 =$  (19) 與臨界值 3.841 作比較，而拒絕虛無假設  $H_0: \eta_A = \eta_B$ ，此檢定所需之自由度  $v =$  (20)。
  - 以顯著水準  $\alpha = 0.05$  檢定，A、B 包裝商品的銷售量是否無關，即相關係數參數  $\rho = 0$ ？
    - ◆ 設兩銷售量之母體分配為二元常態分配，若已求得 Pearson 積差相關係數  $r = 0.09$ ，則可求得檢定統計量  $F =$  (21) 或  $t =$  (22) 與臨界值作比較，而不拒絕虛無假設  $H_0: \rho = 0$ 。此 t 檢定所需之自由度  $v =$  (23)。
    - ◆ 亦可求得 Spearman 等級相關係數  $r_s = 0.12$ ，檢定統計量  $t =$  (24) 或  $Z =$  (25) 與臨界值作比較，而不拒絕虛無假設  $H_0: \rho = 0$ 。

見背面

## II、問答與計算題 (共 50 分)

1. 設  $\{X_i\}_1^5 \stackrel{i.i.d.}{\sim} U(0,1)$  表示一組來自均勻分配之隨機樣本，令  $Y_1 = \min_{1 \leq i \leq 5} X_i$ ， $Y_5 = \max_{1 \leq i \leq 5} X_i$ ， $Y_m = \{X_i\}_1^5$  之中位數。
- (1) 試分別寫出 (i)  $(Y_1, Y_5)$  之聯合 pdf (probability density function)。(ii)  $Y_1$ 、 $Y_5$ 、 $Y_m$  之邊際 pdf。(6 分)
- (2) 試推導(derive)全距(range)，記為  $R$  之 pdf。需註明  $R$  之分配名稱與參數。(5 分)
- (3) 計算  $R$  之期望值  $E(R)$  及變異數  $\text{Var}(R)$ 。(4 分)
2. 設  $\{X_i\}_1^n \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(\mu, 1)$  為一組來自常態分配之隨機樣本。
- (1) 以顯著水準  $\alpha = 0.05$ ，試推導檢定虛無假設  $H_0: \mu = 0$  vs. 對立假設  $H_1: \mu = 10$  之最強力檢定 (most powerful test)。(5 分)
- (2) (i) 試說明 (1) 中所求之檢定具有何種好的性質？(ii) 此性質係依據一有名之引理(lemma)，試述此引理之名稱及內容。(5 分)
- (3) 試求  $\mu$  之動差估計元(moment estimator)，記為  $\hat{\mu}$ ，並以  $\hat{\mu}$  建立一  $\mu$  之 95% 的信賴區間。(5 分)
3. 設  $\{X_i\}_1^n \stackrel{i.i.d.}{\sim}$  卜瓦松分配  $P(\lambda)$ ，參數  $\lambda$  未知，
- (1) 試寫出  $\lambda$  之參數空間  $\Omega$ ，並說明  $\lambda$  之含意。(4 分)
- (2) 試求  $\lambda$  之某一充分統計量(sufficient statistic)，記為  $S$ ，並驗證  $S$  確實具有充分性(sufficiency)。(6 分)
- (3) 試求  $\lambda$  之最大概似估計元(maximum likelihood estimator)，記為  $\hat{\lambda}_{MLE}$ 。(5 分)
- (4) 請說明  $\hat{\lambda}_{MLE}$  是否為  $\lambda$  之最有效的估計元(the most efficient estimator)？(5 分)

試題隨卷繳回