

1. (a) (10%) 請證明  $y_1(x)=x^2$  以及  $y_2(x)=x-1$  是下列微分方程式之解

$$(x^2 - 2x)y'' + 2(1-x)y' + 2y = 0$$

- (b) (10%) 請利用(a)找出下列微分方程式之一般解 (general solution)

$$(x^2 - 2x)y'' + 2(1-x)y' + 2y = 6(x^2 - 2x)^2$$

2. (a) (10%) 請描述數學上著名之 Sturm-Liouville 問題，請就方程式以及相關條件說明之。

- (b) (15%) 考慮周期條件 Sturm-Liouville 問題之特例

$$y'' + \lambda y = 0$$

$$y(-10) = y(10), y'(-10) = y'(10)$$

於  $[-10,10]$  區間內，試就不同之  $\lambda$  值討論所伴隨之特徵值 (eigenvalues) 以及特徵函數 (eigenfunctions)。

3. (15%) 假定大氣中物質溫度變化速率與其本身溫度  $T$  以及周圍溫度  $T_0$  的差成正比，試寫出其微分方程式並求其通解。

4. (a) (10%) 已知函數  $f(x)=4, -3 \leq x \leq 3$  試將  $f(x)$  做傅立葉級數 (Fourier series) 展開。

- (b) (10%) 若相同函數位於區間  $-1 \leq x \leq 1$  內，做傅立葉級數展開後有何不同。

5. 請找出下列微分方程組的一般解。

(a) (10%)

$$\begin{aligned} x_1' &= 5x_1 + 2x_2 \\ x_2' &= -2x_1 + x_2 \end{aligned}$$

(b) (10%)

$$\begin{aligned} x_1' &= 5x_1 + 2x_2 - 3e^x \\ x_2' &= -2x_1 + x_2 + e^{3x} \end{aligned}$$