

※ 注意：請於試卷內之「非選擇題作答區」作答，並應註明作答之題號。

第壹部份 線性代數

填充題(每格 3 分)

1. 試求  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$  之行列式值為何? ( )

2. 若  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ，求古典伴隨矩陣(classical adjoint matrix)  $adjA = ?$  ( )

$A^{-1} = ?$  ( )

3. 方程組  $\begin{cases} x+y+3z=7 \\ x-y-z=1 \\ y+2z=3 \end{cases}$  解的個數為何? ( ) 其解為何? ( )

計算題

1. 矩陣  $A = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  的特徵值為何? (3 分) 矩陣  $A$  是否為一正定矩陣? (要證明或舉例說明原因才給分) (6 分)

2. 證明或舉例說明矩陣  $A = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.18 & 0.27 \\ 0.18 & 0.16 & 0.03 \\ 0.27 & 0.03 & 0.36 \end{bmatrix}$  是否可能為三個隨機變數之

變異數-共變數矩陣(variance-covariance matrix)。(10 分)

3. 試對  $A = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 6 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$  作喬列斯基分解(Cholesky decomposition)。(10 分)

4. 設  $P_4$  為一個所有小於等於 4 次的實係數多項式空間，請判斷下列的敘述哪些是可以成為  $P_4$  的子空間。(6 分)

(1) 在  $P_4$  裡面，且最高次方是偶數次的多項式。

(2) 在  $P_4$  裡面，且  $P(0)=0$ 。

(3) 在  $P_4$  裡面，且至少有一實根的多項式。

見背面

## 第貳部份 微分方程

請解下列 5 題微分方程，務必清楚表示求解過程(每題 10 分)

1. 試解  $\frac{dy}{dx} = \frac{y - xy^2 - x^3}{x + x^2y + y^3}$ 。

2. 試解  $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^x$ 。

3. 試解  $x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} = 3x^2$ 。

4. 試解 
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_2 + x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = 4x_1 - x_2 - 4x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = -3x_1 - x_2 + 4x_3 \end{cases}$$

5. 請用級數解法解  $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$ 。

試題隨卷繳回