一、【共 30 分】

對以下 2×2 列聯表資料：

	行因子		總計
列因子	f_{11}	f_{12}	R_1
	f_{21}	f_{22}	R_2
總計	C_1	C_2	n

(1) 證明下之統計量

$$T=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{(f_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

可以簡化為

$$T=\frac{n(f_{11}f_{22}-f_{12}f_{21})^2}{R_1R_2C_1C_2}$$

以上 e_{ij} 定義為：

$$e_{ij}=\frac{R_iC_j}{n},\ i,j=1,2$$ 。(15 分)

(2) 在本題之 2×2 列聯表中，若 R_1, R_2, C_1及C_2 為已知，但 4 個 f_{ij} 為未知，「在 e_{ij} 定義為 $e_{ij}=R_iC_j/n$ 之條件下，若 $f_{ij}=e_{ij}$，則很明顯地可以得到 $T=0$」的結果。但反之，「若 $T=0$ 時，則 $e_{ij}=R_iC_j/n$」的結果是否可以成立？請以證明方式說明之。(15 分)

二、【共 20 分】

假設 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ 為 k 個 $1\times n$ 向量，即 $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in})$，並將 k 個向量組成一個 $1\times nk$ 向量為 $\mathbf{x}_{nk} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k)$。

根據此 nk 個 x_{ij} $(i=1,\ldots,k; j=1,\ldots,n)$，定義：

$$t = n\sum_{i=1}^{k}(\overline{x}_i - \overline{\overline{x}})^2 \text{ ，}$$

在此 $\overline{x}_i = \sum_{j=1}^{n}\frac{x_{ij}}{n}$ 且 $\overline{\overline{x}} = \sum_{i=1}^{k}\frac{\overline{x}_i}{k}$。

另定義：

$\overline{\mathbf{x}}_k = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k)$ 為一個 $1\times n$ 向量；

$\mathbf{1}_n$ 為一個 $1\times n$ 向量，此向量 n 個元素數值均為 1；

$\mathbf{I}_n$ 為一個 $n\times n$ 方矩陣，此方矩陣所有對角線元素數值均為 1 且其他非對角線元素數值均為 0；

一個 $m\times n$ 矩陣 $\mathbf{A}$ 與一個 $p\times q$ 矩陣 $\mathbf{B}$ 的 Kronecker 乘積，記為

$\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}$，此矩陣是一個 $mp\times nq$ 矩陣 $\begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \cdots & a_{1n}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & \cdots & a_{mn}\mathbf{B} \end{pmatrix}$；

$\mathbf{A}_1 = (\mathbf{I}_k - k^{-1}\mathbf{1}_k'\mathbf{1}_k)$；且

$\mathbf{A}_2 = n^{-1}(\mathbf{I}_k - k^{-1}\mathbf{1}_k'\mathbf{1}_k)\otimes\mathbf{1}_n'\mathbf{1}_n$。

根據以上定義，回答下列問題：

(1) 驗證 $\mathbf{A}_1$、$\mathbf{A}_2$ 是否具有 idempotent 性質？(6 分)

(2) 證明將 t 的平方項展開後可推導得到 $t = n\,\overline{\mathbf{x}}_k\mathbf{A}_1\overline{\mathbf{x}}_k'$。(6 分)

(3) 依據題(2)之結果，進一步驗證 $t = \mathbf{x}_{nk}\mathbf{A}_2\mathbf{x}_{nk}'$ 是否成立？(8 分)

接次頁

三、【共 20 分】

令 X 為具有 *gamma* 分布之隨機變數，其機率密度函數表示如下：

$$g(x)=\frac{x^{-1+1/\theta}\exp(-x/\theta)}{\Gamma(1/\theta)\theta^{1/\theta}}，\quad x>0。$$

在 $X=x>0$ 之條件下，假設 Y 為一具有指數分布之隨機變數，其條件存活函數為

$$S(y|x)=P(Y>y|X=x)=\exp(-xy)，\quad y>0。$$

令 $S_Y(y)=P(Y>y)$，即 $S_Y(y)$ 為 Y 的邊際存活函數。

回答下列問題：

(1) 驗證以下二個等式之正確性：

$$\int_0^\infty x\cdot g(x)dx=1 \quad 且 \quad \int_0^\infty (x-1)^2 g(x)dx=\theta。(8 分)$$

(2) 計算積分式 $\int_0^\infty S(y|x)g(x)dx$=?（此積分式即為 Y 的邊際存活函數 $S_Y(y)$。）(6 分)

(3) 計算 $-\dfrac{dS_Y(y)}{dy}$=? (此微分式即為 Y 的邊際機率密度函數。)(6 分)

見背面

四、【共 30 分】

某營養公司想了解每月健康食品需求量(Demand,記為 D)與價格(Price,記為 P）之函數，若 D 與 P 之函數關係為:

$$D(P)=81-P^2$$

(1) 請畫出需求量相對於價格之圖，並以導函數（derivative function）之觀念說明需求量如何受價格之變動而變動。(3 分)

(2) 定義需求量變化相對速率（Relative rate of change of demand, 記為 $RR_D(P)$）為 $\left[\frac{dD(P)}{dP}\right]/D(P)$，以導函數說明需求量變化相對速率為何是 $\frac{d}{dP}lnD(P)$？（3 分）

(3) 求當價格為 3 元時，(2)之變化相對速率之值。(3 分)

(4) 如同 (2) 之定義，寫出價格變化相對速率（Relative rate of change of price）之數學式。(3 分)

(5) 將(4) 價格變化相對速率之數學式改寫成 P 之函數(記為 $RR_P(P)$)，求其在 P=3 元時之值。(3 分)

(6) 以(2)之相對速率($RR_D(P)$)除以(5)之相對速率($RR_P(P)$)得彈性需求函數 E(P)，寫出 E(P)之數學式。(3 分)

(7) 續(6)，求 $\lim_{p\to\infty} E(P)$之值。(3 分)

(8) 求(6) 之 E(P) 在 P=3 元之值。(3 分)

(9) 續(8)，當 P=3 元時，若價格變化 1%，則需求量變化為多少%？(3 分)

(10) 比較 P=6 元與 P=3 元時之 E(P)，並說明兩者意義有何不同。(3 分)