題號： 259
科目：工程數學(J)
節次： 4

國立臺灣大學 113 學年度碩士班招生考試試題

題號： 259
共 1 頁之第 1 頁

1. If $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, (1) please diagonalize the matrix $\mathbf{A}$, i.e. to find X and D so that $X^{-1}AX=D$, where $\mathbf{D}$ is a diagonal matrix. 【計分：10 分】 (2) compute $\mathbf{A}^{100}$ 【計分：10 分】

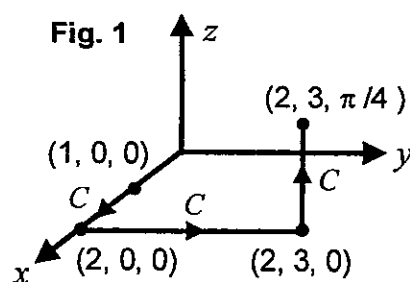2. Please use the Laplace transform to solve the initial value problem tx''+x'+tx=0, x(0)=1, x'(0)=0. (Hint: knowing $L^{-1}\{J_0(t)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$, where L^{-1} indicates the inverse Laplace Transform, and $J_0(t)$ is the Bessel function of the first kind and order zero) 【計分：20 分】

3. Please solve the differential equation: y''+9y=csc3x 【計分：10 分】

4. 積分路徑如 **Fig. 1** 所示，試求算下列的線積分：【計分：15 分】

$$\int_{(1,0,0)}^{(2,3,\pi/4)} \left\{ \left[\frac{1}{(x+2y+3z)} - 3x \right] \mathbf{i} + \left[\frac{2}{(x+2y+3z)} + y^2 \right] \mathbf{j} + \left[\frac{3}{(x+2y+3z)} - \tan^{-1} z \right] \mathbf{k} \right\} \cdot d\mathbf{r} = ?$$

Fig. 1

5. 求解下列邊界值問題(Boundary-Value Problem)的固有值(Eigenvalues)與固有函數(Eigenfunctions)：【計分：15 分】

$$\left(x^2 y' \right)' + \lambda y = 0 \ , \ 1 < x < e \ , \ y(1) = 0 \ , \ y'(e) = 0$$

6. 試求解下列的偏微分方程式：【計分：20 分】

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \ , \ 0 < x < 1 \ , \ t > 0$$

$$u(0,\ t) = 0 \ , \ u(1,\ t) = \sin t \ , \ t > 0$$

$$u(x,\ 0) = 0 \ , \ \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \ , \ 0 < x < 1$$

試題隨卷繳回