I. 統計個案分析 (共 50 分，每題 5 分)

大木博士欲研究皮卡丘寶寶性別和皮卡丘媽媽體重兩者之間的關係。大木博取得 20 隻皮卡丘寶寶的性別和皮卡丘媽媽體重的資料，整理如下列表格。Y 為一虛擬變數，若皮卡丘寶寶為公的(母的)，則 Y=1(Y=0)。X 為皮卡丘媽媽的體重，假設 X 遵循常態分配。

編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
寶寶性別(Y)	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
媽媽體重(X)	4	5	5	6	6	7	7	8	2	2

編號	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
寶寶性別(Y)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
媽媽體重(X)	2	3	4	4	4	5	5	6	6	7

請協助大木博士完成以下十個統計問題。

1. 若皮卡丘寶寶性別變數(Y)服從伯努力(Bernoulli)分配，且皮卡丘媽媽生男生女的理論機率各半，請寫下 Y 的機率函數；又變異數 Var(Y)等於多少? (3+2 分)
2. 請依據資料畫出 X 變數(皮卡丘媽媽體重)的箱型圖(box plot)，需在圖中標註對應的敘述統計量的數值。
3. 大木博士寫下虛無假設 H0: $\sigma^2_{X|Y=0} = \sigma^2_{X|Y=1}$，試以 F 檢定檢驗該假說。請問檢定統計量 F 值為何?虛無假說是否成立? (提示: $F_{0.05,(11,7)}=3.603$)
4. 大木博士寫下第二個虛無假設 H0: $\mu_{X|Y=0} = \mu_{X|Y=1}$，請以 t 檢定檢驗第二個假說。請問檢定統計量 t 值為何?在 5%和 1%顯著水準之下，分別說明虛無假說是否成立? (3+2 分)
5. 大木博士以古典迴歸模型估算 X 對 Y 的影響，建立迴歸模型 $Y_i=a+bX_i+u_i$，i=1 到 20。根據普通最小平方法估計結果，$\hat{a} = -0.321$，$\hat{b} = 0.147$。請問斜率標準差 SD($\hat{b}$)等於多少?
6. $\sum \hat{Y}_i \hat{u}_i$等於多少?
7. Cov($\hat{a}, \hat{b}$)等於多少?
8. 真新鎮的小智剛從台大財金系畢業，依據小智所學的統計學，小智說古典迴歸模型需驗證高斯-馬可夫定理(Gauss-Markov Theorem)。請簡述高斯-馬可夫定理為何?
9. 小智跟大木博士提到，他設立的古典迴歸模型 $Y_i=a+bX_i+u_i$，也稱為線性機率模型(linear probability model)，表示皮卡丘寶寶為公皮卡丘的機率，P(Y=1)，可用線性模型表示。請指出線性機率模型的(至少兩項)缺點。(2+3 分)
10. 小智建議以邏輯迴歸(logistic regression)模型研究皮卡丘寶寶為公皮卡丘的機率，設立模型 $\mathrm{P}(Y_i=1)=\dfrac{\exp(c+dW_i)}{1+\exp(c+dW_i)}$，其中 $X_i \leq 5$，則 W_i=0；反之，W_i=1。請以大木博士的資料計算 c 和 d 的值

II. 問答與計算題 (共 50 分)

1. 設X_n為卜瓦松 Poisson ($n\lambda$)分配，n=1, 2, …
   (1) 當 n 固定，試求 X_n/n 之精準分配的機率質點函數(probability mass function)。(5 分)
   (2) 當 n→∞，請驗證 X_n/n 將機率收斂(converge in probability)至 λ。(5 分)
   (3) 若 λ=2，計算 n 使$\mathrm{P}\left(\left|\frac{X_n}{n}-2\right|>0.01\right)<0.05$成立。(5 分)

見背面

2. 令 X_1，X_2 為兩個獨立同態(i.i.d.)之指數 Exp(λ=1)分配，令 $U=\frac{X_1}{X_1+X_2}$，$S=X_1+X_2$，

 (1) 試計算 U 與 S 之聯合分配(joint pdf)，並說明 U 與 S 之間是否獨立? (5 分)

 (2) 分別求 U 與 S 之邊際分配，以及認出 U 與 S 之分配名稱，需註明參數。(5 分)

 (3) 計算 U 之期望值 E(U)，以及變異數 Var(U)。(5 分)

3. 設$\{X_i\}_1^n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} F(x)$，F(·)為某一連續隨機變數之 cdf，若 F(·)未知。

 (1) 試定義經驗分配函數(Empirical distribution function)，記為$\hat{\mathrm{F}}_n(\cdot)$，並計算$\hat{\mathrm{F}}_n(x)$之期望值$\mathrm{E}(\hat{\mathrm{F}}_n(x))$以及變異數$\mathrm{Var}(\hat{\mathrm{F}}_n(x))$，$x$ 為$\in R$之任一實數。(10 分)

 (2) 給 10 筆資料{−0.3, 0.2, 0.0, −0.9, −0.55, 0.95, −0.10, 0.15, 0.80, 0.35}，試以 α=0.10，求一檢定 H₀: $\{X_i\}_1^{10} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} U(-1,1)$ v.s. H₁: $\{X_i\}_1^{10} \nsim U(-1,1)$，需寫出

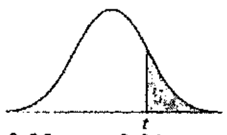
  (i) 檢定統計量

  (ii) 拒絕域

  (iii) 決策

 ($U(-1,1)$表示在$(-1,1)$之間的均勻分配，附表 K-S 檢定: 0.10=P(D_{10}> 0.37)) (10 分)

t 分配機率表



t (df=18)	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.00	0.5000	0.4961	0.4921	0.4882	0.4843	0.4803	0.4764	0.4725	0.4686	0.4646
0.10	0.4607	0.4568	0.4529	0.4490	0.4451	0.4412	0.4373	0.4335	0.4296	0.4257
0.20	0.4219	0.4180	0.4142	0.4103	0.4065	0.4027	0.3989	0.3951	0.3913	0.3876
0.30	0.3838	0.3801	0.3763	0.3726	0.3689	0.3652	0.3615	0.3579	0.3542	0.3506
0.40	0.3469	0.3433	0.3397	0.3361	0.3326	0.3290	0.3255	0.3220	0.3185	0.3150
0.50	0.3116	0.3081	0.3047	0.3013	0.2979	0.2945	0.2912	0.2879	0.2846	0.2813
0.60	0.2780	0.2747	0.2715	0.2683	0.2651	0.2620	0.2588	0.2557	0.2526	0.2495
0.70	0.2464	0.2434	0.2404	0.2374	0.2344	0.2315	0.2285	0.2256	0.2228	0.2199
0.80	0.2171	0.2143	0.2115	0.2087	0.2060	0.2032	0.2005	0.1979	0.1952	0.1926
0.90	0.1900	0.1874	0.1849	0.1823	0.1798	0.1773	0.1749	0.1725	0.1700	0.1676
1.00	0.1653	0.1629	0.1606	0.1583	0.1561	0.1538	0.1516	0.1494	0.1472	0.1450
1.10	0.1429	0.1408	0.1387	0.1367	0.1346	0.1326	0.1306	0.1286	0.1267	0.1248
1.20	0.1228	0.1210	0.1191	0.1173	0.1154	0.1137	0.1119	0.1101	0.1084	0.1067
1.30	0.1050	0.1033	0.1017	0.1001	0.0985	0.0969	0.0953	0.0938	0.0922	0.0907
1.40	0.0893	0.0878	0.0863	0.0849	0.0835	0.0821	0.0808	0.0794	0.0781	0.0768
1.50	0.0755	0.0742	0.0729	0.0717	0.0705	0.0693	0.0681	0.0669	0.0658	0.0646
1.60	0.0635	0.0624	0.0613	0.0602	0.0592	0.0581	0.0571	0.0561	0.0551	0.0541
1.70	0.0532	0.0522	0.0513	0.0504	0.0495	0.0486	0.0477	0.0468	0.0460	0.0451
1.80	0.0443	0.0435	0.0427	0.0419	0.0412	0.0404	0.0397	0.0389	0.0382	0.0375
1.90	0.0368	0.0361	0.0354	0.0348	0.0341	0.0335	0.0328	0.0322	0.0316	0.0310
2.00	0.0304	0.0298	0.0293	0.0287	0.0282	0.0276	0.0271	0.0266	0.0260	0.0255
2.10	0.0250	0.0246	0.0241	0.0236	0.0232	0.0227	0.0223	0.0218	0.0214	0.0210
2.20	0.0206	0.0201	0.0197	0.0194	0.0190	0.0186	0.0182	0.0179	0.0175	0.0172
2.30	0.0168	0.0165	0.0161	0.0158	0.0155	0.0152	0.0149	0.0146	0.0143	0.0140
2.40	0.0137	0.0134	0.0132	0.0129	0.0126	0.0124	0.0121	0.0119	0.0116	0.0114
2.50	0.0112	0.0109	0.0107	0.0105	0.0103	0.0100	0.0098	0.0096	0.0094	0.0092
2.60	0.0090	0.0089	0.0087	0.0085	0.0083	0.0081	0.0080	0.0078	0.0076	0.0075
2.70	0.0073	0.0072	0.0070	0.0069	0.0067	0.0066	0.0064	0.0063	0.0062	0.0060
2.80	0.0059	0.0058	0.0057	0.0055	0.0054	0.0053	0.0052	0.0051	0.0050	0.0049
2.90	0.0048	0.0047	0.0046	0.0045	0.0044	0.0043	0.0042	0.0041	0.0040	0.0039
3.00	0.0038	0.0038	0.0037	0.0036	0.0035	0.0034	0.0034	0.0033	0.0032	0.0032
3.10	0.0031	0.0030	0.0030	0.0029	0.0028	0.0028	0.0027	0.0027	0.0026	0.0025
3.20	0.0025	0.0024	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020
3.30	0.0020	0.0019	0.0019	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0017	0.0017	0.0016
3.40	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014	0.0014	0.0013	0.0013
3.50	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010

試題隨卷繳回