國立臺灣大學99學年度碩士班招生考試試題

科目：線性代數(B)

1. 已知某 3x3 矩陣 $\mathbf{A}$ 是由三個線性獨立（linearly independent）向量所組成，且 $\mathbf{N}=\mathbf{A}^T\mathbf{A}$，請判斷下列 $\mathbf{N}$ 矩陣之合理性，並詳細說明判斷理由。(15%)

   (1) $\mathbf{N}=\begin{bmatrix}7 & 8 & 15\\ 8 & 12 & 20\\ 5 & 20 & 35\end{bmatrix}$ (2) $\mathbf{N}=\begin{bmatrix}7 & 8 & 15\\ 8 & 12 & 20\\ 15 & 20 & 35\end{bmatrix}$ (3) $\mathbf{N}=\begin{bmatrix}7 & 8 & 15\\ 8 & -1 & 20\\ 15 & 20 & 35\end{bmatrix}$ (4) $\mathbf{N}=\begin{bmatrix}7 & 8 & 0\\ 8 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 35\end{bmatrix}$

   (5) $\mathbf{N}=\begin{bmatrix}8 & 7 & 0\\ 1 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 35\end{bmatrix}$

2. 假設某一矩陣 $\mathbf{B}$ 之特徵值為 $\lambda_1=1.00$ 及 $\lambda_2=3.00$，且所對應之特徵向量為 $\bar{e}_1=[0.6 \quad 0.8]^T$ 及 $\bar{e}_2=[0.8 \quad -0.6]^T$，試求下列矩陣或行列式之值：(20%)

   (1) $\mathbf{B}$ (2) $\mathbf{B}^{-1}$ (3) $\mathbf{B}^{20}$ (4) $\left|\mathbf{B}^{30}\right|$

3. 下列 L1 及 L2 分別代表空間中兩條不相交的直線方程式：

   L1: $\dfrac{(x-x_1)}{a_1}=\dfrac{(y-y_1)}{b_1}=\dfrac{(z-z_1)}{c_1}$ L2: $\dfrac{(x-x_2)}{a_2}=\dfrac{(y-y_2)}{b_2}=\dfrac{(z-z_2)}{c_2}$

   A、B 兩點分別在兩條直線上且彼此距離最短處，請以代數式分別表示：

   (1) 向量 $\overline{AB}$。(5%)

   (2) 兩直線之最短距離 $\left|\overline{AB}\right|$。(10%)

   (3) 證明 $\overline{AB}\cdot\{a_1 \quad b_1 \quad c_1\}=0$。(10%)

4. 已知矩陣 $\mathbf{K}=\mathbf{RDR}^T$，其中 $\mathbf{D}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$\mathbf{R}$ 為任意正交矩陣，證明矩陣 $\mathbf{K}$ 為冪等矩陣（idempotent matrix）。(15%)

5. 請列舉至少三項判斷矩陣可逆/奇異與否的方法，並詳述理由。(15%)

6. 試闡述對於一任意非線性方程式 $F(\mathbf{x})=0$，其可被線性化為 $F(\mathbf{x})=F(\mathbf{x}_0)+\left.\dfrac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)=0$ 之充分條件為何？其中 $\mathbf{x}_0$ 代表向量變數 $\mathbf{x}$ 之近似值。(10%)

試題隨卷繳回