

1. (30 分，每小題各 3 分)

假設 x_1, \dots, x_n 是從隨機變數 X (遵循指數分佈，且參數為 θ ($\theta > 0$)) 抽取之隨機樣本。假設吾人欲檢視下列虛無 (H_0) 及對立 (H_1) 假說，

$$H_0: \theta=5$$

$$H_1: \theta=8$$

若累積分佈函數 ($F(x)$) 表示如下：

$$F(x) = 1 - e^{-\theta x} \quad \text{—————} \quad (1^*)$$

- (1) 利用式(1*)求 $\theta=5$ 之下之機率密度函數 (pdf) _____。
- (2) 利用上述之 pdf 求 $E(X)$ 及 $\text{Var}(X)$ _____。
- (3) 利用 x_1, \dots, x_n 之樣本及上述(1)中之 pdf 寫出 H_0 之下 $\theta=5$ 之概似函數 (likelihood function) _____。
- (4) 寫出上述(3)概似函數之充份統計量 (sufficient statistics, 以 T 表示) _____。
- (5) 若使用(4)概似函數充份統計量 T 配合 H_0 及 H_1 之 θ 參數，導演 H_1/H_0 概似函數比(likelihood ratio)之算式 _____。
- (6) 請利用(5)概似函數比值 (K) 及其算式寫出以 T 為主之其拒絕 H_0 之不等式 _____。
- (7) T 充分統計量可以用伽瑪 (Gamma) 機率分佈 (參數為 n 及 θ)，請問 $\frac{2T}{\theta}$ 是何種機率分佈 (一種特殊的伽瑪分佈)，並描述此分佈所需參數 _____。
- (8) 在 α (檢定水準) 為 0.05 下及利用(7)中 $\frac{2T}{\theta}$ 之統計分佈，在大於某臨界值 (以 $c_{0.95}$ 表示) 之下，寫出拒絕 H_0 之 θ 值的檢定函數 (Power function) 及計算 $n=5$, $\theta=5$ 且 $c_{0.95}=18.31$ 之下 $\bar{X}(T/n)$ 至少大於何值才能拒絕 H_0 _____。

見背面

[續 1.]

(9) 假設 n 很大情況之下，寫出常態分佈近似 ($E(T) = n\theta$, $\text{Var}(T) = n\theta^2$) 之檢定函數 (Power function)，並求在 $\theta=5$ 且 $Z_{0.95}=1.645$ ，當 $n=25$ 時其 $\bar{X}(T/n)$ 至少須大於何值才能拒絕 H_0 _____。

(10) 若假說改為 $H_0: \theta=5$, $H_1: \theta>5$ ，則統計檢定結果無論 H_1 之值為多大，拒絕 H_0 結果皆相同，您同意嗎？請問此根據何種統計推論原理？

2. (15 分，每小題各 5 分) 給定隨機樣本 $X_1, \dots, X_n \sim \text{Uniform}(0, \theta)$

- (1) 請求出 θ 的 (一維的) 充分統計量 (sufficient statistic)。
- (2) 請求出 θ 的最大概似估計 (MLE)，定義為 $\hat{\theta}$ 。
- (3) 請求出 $\hat{\theta}$ 的機率密度函數 (probability density function)。

3. (25 分，每小題各 5 分) 考慮模型 A 如以下描述： X_{i1} 和 X_{i2} ， $i = 1, \dots, n$ ，彼此獨立且服從 $\text{Bernoulli}(\theta)$ ，並令 $Y_{ij} = 1$ 若 $X_{i1} + X_{i2} = j$ ，否則 $Y_{ij} = 0$ ， $j = 0, 1, 2$ 。根據觀察到的資料 $Y_j = \sum_{i=1}^n Y_{ij}$ 回答以下問題。

- (1) 令 $p_j = P(Y_{ij} = 1)$ ， $j = 0, 1, 2$ 。請以 p_j 寫出 (Y_0, Y_1, Y_2) 的分配函數。
- (2) 在模型 A 下，請以 θ 表示 p_j ， $j = 0, 1, 2$ 。
- (3) 在模型 A 下，請求出 θ 的最大概似估計 (MLE)。
- (4) 請寫出 [欲檢定資料 (Y_0, Y_1, Y_2) 是否服從模型 A] 的假說檢定。
- (5) 請寫出對上題假說的 Likelihood Ratio Test (LRT) 的檢定統計量 λ 。當 n 很大的時候， λ 會服從什麼分配？

接次頁

4. (30 分) 某大學針對 102 名碩士班一年級男性新生進行入學身體檢查，其中有一個項目是檢查肺功能，每一個學生對著一個管子大力呼氣以測量一秒鐘用力呼氣量 (forced expiratory volume in 1 second [fev1])。從過去的文獻知道 fev1 和身高有關，於是針對 fev1 和身高的關係進行線性迴歸分析，其模型為：

$$\text{fev1} = b_0 + b_1 * \text{身高} + e$$

其迴歸分析之變異數分析結果如下表一：

表一：

變異來源	平方和 (Sum of Squares)	自由度 (Degree of Freedom)	均方 (Mean Squares)
模型	341000	1	341000
殘差	A	B	D
總和	696000	C	E

- (1). 表一中大寫英文字母 A 到 E 分別代表一個尚未完成的空格，請將這些空格完成之 (每格 2 分)
- (2). 請問判定係數 (R^2) 是多少？四捨五入到小數點第 2 位。(5 分)
- (3). 已知身高的標準差為 9，fev1 的標準差為 81 請根據表一的結果算出 b_1 。(5 分)
- (4). 請計算 b_1 的變異數 (variance)，四捨五入到小數點第 2 位 (5 分)
- (5). 下圖是殘差對身高的散布圖，請評論之 (5 分)

