請依序作答

甲、第一部分(40 分)

以下六題，任選五題作答，每題 8 分。

注意:請標明你所選的題目，否則依序評閱，多寫部分將不予評分。以下第二部分同。

1. 請舉一例：
   $f'(x)$ 存在 $\forall x \in (-1,1)$，但 $f'(x)$ 在 $(-1,1)$ 上並不連續。

2. 利用 $\varepsilon-\delta$ 論述，證明： $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+5}} = \dfrac{2}{3}$ 。

3. $\ell^2 = \left\{ \mathrm{x} \mid \mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots),\ x_i \in \mathrm{R},\ \sum_{i=1}^{\infty} x_i^{\,2} < \infty \right\}$

   令 $\|\mathrm{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^{\,2} \right)^{1/2}$, $\mathrm{B} = \left\{ \mathrm{x} \mid \mathrm{x} \in \ell^2, \|\mathrm{x}\|_2 \le 1 \right\}$ 。

   因 B 為有界閉集(bounded and closed set)，故 B 為緊緻集(compact set)。
   上述推論正確否？詳述你的理由。

4. 任意 metric space 中的 Cauchy sequence 恆收斂。
   上面的敘述正確否？詳述你的理由。

5. $f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & 0 < x \le 1 \\ 0 , & x = 0 \end{cases}$

   問：f 在 $[0,1]$ 上是否 Riemann 可積分？

6. $[0,1]$ 中有理點可列，令其為 $\{r_1, r_2, r_3, \cdots\}$ 。
   給定 $\varepsilon > 0$，令 $I_n(\varepsilon) = \left(r_n - \dfrac{\varepsilon}{2^n}, r_n + \dfrac{\varepsilon}{2^n} \right)$, $\mathrm{B}(\varepsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n(\varepsilon)$ 。
   由於有理點在 $[0,1]$ 上稠密，故 $B(\varepsilon) \supset [0,1]$, $\forall \varepsilon > 0$ 。
   上面的推論正確否？ 詳述你的理由。

見背面

乙、第二部分(60 分)

以下五題，任選四題作答，每題 15 分。

7. (a) $0 \le x \le 1$，簡繪 $K_n(x) = (n+1)x^n$ 的圖形，當 n 很大。

(b) f 在 $[0,1]$ 上連續，

猜：$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 K_n(x) f(x)\,dx$ 之值，並證明之。

8. 試證 Riemann Lebesgue lemma：

f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分，則

$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\,dx = 0$

9. (a) 試述 Arzela-Ascoli 定理。

(b) $f_n \in C^1[0,1]$（即：f_n' 在 $[0,1]$ 上連續）

$f_n(0) + \int_0^1 f_n'(x)^2\,dx \le 10,\ \forall n$

試證：$\{f_n\}$ 在 $[0,1]$ 上有均勻收斂子序列(Uniformly convergent subsequence)。

10. $S = \{(x,y,z) \mid x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1\}$，點 $P(0,0,1) \in S$，問：

(a) 在 P 點附近，S 是否可表成 $z = z(x,y)$ 的函數型式？如可，其可微性(differentiability)如何？

(b) 在 P 點附近，S 是否可表成 $x = x(y,z)$ 的函數型式？如可，其可微性如何？

11. (a) f 為定義於 $[a,b]\times[c,d]$ 上的可積函數，請給出適當條件使

$\frac{d}{dx}\int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,dy$ 成立，並證明之。

(b) 當 $[c,d]$ 改為 $[0,\infty)$，所牽涉到的是瑕積分(Improper integral)，請給出適當條件使

$\frac{d}{dx}\int_0^\infty f(x,y)\,dy = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,dy$ 成立。條件越寬越好，不必證明。