

1. 若矩陣 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ，試求解 A^{100} 【計分：10 分】
2. 試求解 $y'' + 5y' + 6y = u(t-1) + \delta(t-2)$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$, 當中的 $u(t)$ 為 unit step function, $\delta(t)$ 為 unit impulse function 【計分：10 分】
3. 試求解微分方程式: $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 7x^4 \sin x$ 【計分：10 分】
4. 試求解 $X' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-2t}$ 【計分：10 分】
5. 試求解微分方程式: $\frac{d^2 y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = e^{-4t}$, $y(0) = 1, y'(0) = 5$, 並求出當中的 zero state response 與 zero input response 【計分：10 分】
6. 已知 $f(x) = 2\pi x - x^2$, $0 < x < 2\pi$, $f(x+2\pi) = f(x)$ 。
- (1) 試求 $f(x)$ 的傅立葉級數(Fourier Series)。【計分：6 分】
- (2) 利用(1)題之結果，求解下列微分方程式之全解：【計分：9 分】

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 48y = f(x), \text{ 初始條件: } y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

7. 試求解下列的偏微分方程式：【計分：20 分】

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = 0, \quad 0 < y < \pi$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, \pi) = 0, \quad 0 < x < \pi$$

<提示> 利用變換法： $u(x, y) = v(x, y) + \psi(x)$ 。

8. 考慮下列在(0, 0)與(2, 4)兩點之間三條曲線的參數表示式：

$$C_1: x(t) = t, \quad y(t) = 2t, \quad 0 \leq t \leq 2$$

$$C_2: x(t) = t, \quad y(t) = t^2, \quad 0 \leq t \leq 2$$

$$C_3: x(t) = 2t - 4, \quad y(t) = 4t - 8, \quad 2 \leq t \leq 3$$

若用 $s(t)$ 代表曲線的弧長參數表示式，試證明：

$$\int_{C_1} xy ds = \int_{C_3} xy ds, \text{ 但是 } \int_{C_1} xy ds \neq \int_{C_2} xy ds, \text{ 並解釋其原因。【計分：15 分】}$$

試題隨卷繳回