1. 解下列微分方程式：【 計分：15 分】

$$(2x+\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2})dx+(2y+\frac{1}{x}-\frac{x}{y^2})dy=0$$

2. 解下列微分方程式：【計分：15 分】

$$y''+3y'-18y=9\sinh 3x$$

3. 以 Laplace Transformation 方法求解下列微分方程式。請注意：你必須以 unit step function（單位階梯函數）的型態來表示 f(t)　【計分：20 分】

$$y'+y=f(t)\quad,\quad y(0)=0$$

$$\text{where}\quad f(t)=\begin{cases}0, & 0\le t<1\\ 5, & t\ge 1\end{cases}$$

4. 已知函數 $f(x)=x(\pi^2-x^2)$，$0<x<\pi$。
   (1) 利用半幅展開(Half-range expansions)法，試求 $f(x)$ 的傅立葉正弦級數(Fourier sine series)。【計分：7 分】
   (2) 已知另一函數 $g(x)=x(x-1)(x-2)$，$0<x<1$。利用第(1)題的結果，試求 $g(x)$ 的傅立葉正弦級數(Fourier sine series)。【計分：8 分】

5. 試求解下列的波動方程式(Wave equation)：【計分：20 分】

$$a^2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

邊界條件：$u(0,\ y,\ t)=0$, $u(\pi,\ y,\ t)=0$, $u(x,\ 0,\ t)=0$, $u(x,\ \pi,\ t)=0$, $u(x,\ \pi,\ t)=0$,

初始條件：$u(x,\ y,\ 0)=xy(x-\pi)(y-\pi)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0$

6. (1) 已知證明 $\mathbf{F}=-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}$，$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=x_1y_2-x_2y_1$，其中 $C$ 為由點$(x_1, y_1)$至點$(x_2, y_2)$的直線段。【計分：7 分】
   (2) 已知有一多邊形，其頂點座標依逆時針順序分別為$(x_1, y_1)$，$(x_2, y_2)$，…，$(x_n, y_n)$。證明：此多邊形的面積 $A$ 為

$$A=\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1)+\frac{1}{2}(x_2y_3-x_3y_2)+\cdots+\frac{1}{2}(x_{n-1}y_n-x_ny_{n-1})+\frac{1}{2}(x_ny_1-x_1y_n)$$ 【計分：5 分】

   (3) 試求頂點座標為(−1, 3)，(1, 1)，(4, 2)，與(3, 5)之四邊形的面積。【計分：3 分】

試題隨卷繳回