

1. 是非題 (請標明題號(a)~(e), 依順序作答, 正確請寫「O」, 不正確請寫「X」):
 R, S, T 均為 2 階方陣, I 為 2 階單位方陣, 下列敘述是否正確?
 (a) 假設 R 為正交可對角化(orthogonally diagonalizable)矩陣, 則 R 必為對稱矩陣。(2%)
 (b) 假設 R, S 均為旋轉矩陣, 則 $RS = SR$ 。(2%)
 (c) $R^2 - S^2 = (R + S)(R - S)$ 。(2%)
 (d) 假設 $RS = T$, 則 $S = R^{-1}T$ 。(2%)
 (e) 假設 $RS = I$, 則 $S^2R^2 = I$ 。(2%)
2. 解微分方程式, 其中 y 為 x 的函數(8%):
 $\sin(y)y' = \cos(y)[1 - x\cos(y)]$
 建議: 可令 $u = \frac{1}{\cos(y)}$
3. 解微分方程式, 其中 y 為 x 的函數(8%):
 $x[\ln(x)]y'' - y' - x[\ln^3(x)]y = 0$
4. 解微分方程組, 其中 y_1 及 y_2 均為 t 的函數(8%):

$$\begin{cases} ty_1' - y_1 - 3y_2 = 0 \\ ty_2' - y_1 + y_2 = 0 \end{cases}$$
5. (a) 求下列函數之 Laplace 轉換(8%):
 $2e^{-t}[\sin^2(t)]$
 (b) 求下列函數之 Laplace 反轉換(8%):
 $\ln\left(\frac{s^2-4}{s^2}\right)$
6. 以下答題時所用符號皆須定義。(a)何謂平面上的格林定理(Green's theorem) (5%)?
 以向量場 $(y^2 - 7y)\mathbf{i} + 2x(y+1)\mathbf{j}$, 曲線 $x^2 + y^2 = 1$ 為例, 證明該定理(5%)。(b)何謂史脫克斯定律(Stokes' law) (5%)? 以向量場 $-y\mathbf{i} + x\mathbf{j} - xyz\mathbf{k}$, 曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 \leq 9$, 與曲線 $x^2 + y^2 = 9$, $z = 3$ 為例, 證明該定律(10%)。
7. 在所給定的條件下, 解以下的偏微分方程, 其中 T 為 x 與 t 的函數(25%):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T^2}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$

$$T(x=0, t) = 0, \quad 0 < t$$

$$T(x, t=0) = f(x), \quad 0 < x < 1$$