題一 10%

表 1 為下列常微分方程式的數值解

$$2\frac{d^3f}{d\eta^3}+f\frac{d^2f}{d\eta^2}=0$$

邊界條件為：當 $\eta=0$ 時，$f=f'=0$ 及當 $\eta\to\infty$時， $f'\to 1$。

其中，$\eta=cy$，c 為常數。

求 （1） $\int_0^\infty(1-f')dy$　　（2） $\int_0^\infty f'(1-f')dy$

表 1 數值解

η	f	f'	f"	η	f	f'	f"
0.0	0.00000	0.00000	0.33206	4.8	3.08532	0.98779	0.02187
0.8	0.10611	0.26471	0.32739	5.6	3.88029	0.99748	0.00543
1.6	0.42032	0.51676	0.29666	6.4	4.67936	0.99961	0.00098
2.4	0.92229	0.72898	0.22809	7.2	5.47923	0.99996	0.00013
3.2	1.56909	0.87608	0.13913	8.0	6.27921	1.00000	0.00001
4.0	2.30575	0.95552	0.06423	8.8	7.07921	1.00000	0.00000

題二 15%

用來描述 R-L 電路（圖 1）的方程式為 $L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)=E(t)$；其中，$t=0$ 時，$i(t)=0$。

於不同輸入電壓下，求電路的電流 $i(t)$？

（1）若 $E(t)=E_0H(t-t_1)$；其中，E_0、t_1 為常數，$t_1>0$，H 為 Heaviside function。

（2）若 $E(t)=E_0\delta(t-t_1)$；其中，E_0、t_1 為常數，$t_1>0$，δ 為 Delta function。

題三 15%

用來描述彈簧-質量系統（spring-mass system）（參考圖 2）的運動方程式為

$$m_1\ddot{x}_1=-kx_1-k(x_1-x_2)$$
$$m_2\ddot{x}_2=-kx_2-k(x_2-x_1)$$

其中，$m_1=m_2=1$、$k=1$。

（1）當 $t=0$ 時，將 m_1 及 m_2 同時往右側移動一個長度單位後釋放，且釋放瞬間的移動速度為 0，求 m_1 及 m_2 後續運動 $x_1(t)$ 及 $x_2(t)$？

（2）當 $t=0$ 時，將 m_1 及 m_2 分別往左側及右側移動一個長度單位後釋放，且釋放瞬間的移動速度為 0，求 m_1 及 m_2 後續運動 $x_1(t)$ 及 $x_2(t)$？

題四 10%

令 S 是（2, −3, 5）、（8, −12, 20）、（1, 0, −2）、（0, 2, −1）、（7, 2, 0）等五個 3-tuples 所構成的集合，由 S 中找出 R^3 的基底（Basis）？

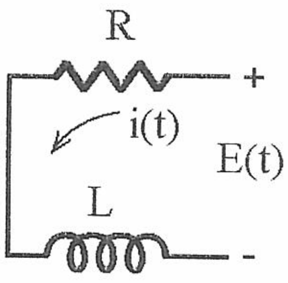


圖 1　R-L 電路

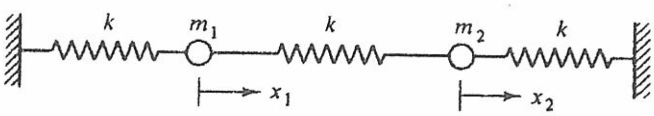


圖 2　彈簧-質量系統

見背面

題五 15%

（1）已知曲面 S 的參數式為：$x=u+v$，$y=u-v^2$，$z=u^2+3v^4$，試求曲面 S 位於 $u=0$，$v=1$ 點處的切平面（tangent plane）方程式。【計分：5 分】

（2）針對下列的敘述進行評論：已知 C 是一個順時針的單位圓，則線積分 $\oint_C f(x,y)dx+g(x,y)dy$ 的值必為零。此種結果乃是因為在此單位圓 C 上，吾人可以將 y 表示為 x 的函數，並可任意取點（1, 0）同時為圍線（Contour） C 的起始點與終點，使得線積分的第一項變成（參考圖 3 所示）

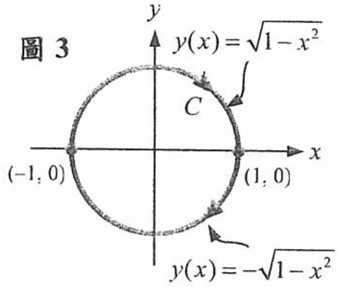
$$\oint_C f(x,y)dx=\int_1^1 f\left(x,y(x)\right)dx=\int_1^1 F(x)dx=0$$

同理，針對線積分的第二項亦可得

$$\oint_C g(x,y)dy=\int_0^0 g\left(x(y),y\right)dy=\int_0^0 G(y)dy=0$$

試問以上敘述是否正確？理由為何？【計分：10 分】

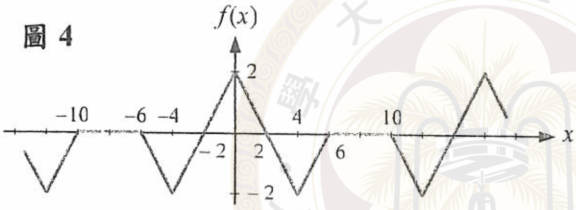
圖 3



題六 10%

一週期函數 $f(x)$ 如圖 4 所示，試求其傅立葉級數（Fourier series）。【計分：10 分】

圖 4



題七 15%

考慮固有值問題（eigenvalue problem）：

$x^2y''+xy'+\lambda y=0$，$(1<x<a)$ （A）

其中，$y(1)=0$，$y(a)=0$。

（1）求此固有值問題的固有值（eigenvalues）與固有函數（eigenfunctions）。【計分：7 分】

（2）將此固有值問題（即式（A））化成 Sturm-Liouville 問題的標準型式：$[p(x)y']'+[q(x)+\lambda r(x)]y=0$，其中在區間[0, 1]上 $p(x)$，$p'(x)$，$q(x)$，及 $r(x)$ 均為連續函數且 $p(x)>0$ 與 $r(x)>0$。【計分：3 分】

（3）假設 $\phi_n(x)$ 為本題第（1）題所求得的固有函數，則定義在區間[0, 1]上的片段連續函數 $f(x)$ 的固有函數展開式（eigenfunction expansion）為 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\phi_n(x)$，試問係數 c_n 為何?【計分：5 分】

題八 10%

解下列偏微分方程式：【計分：10 分】

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-1+x-x\cos t=\frac{\partial u}{\partial t}\text{，}0<x<1\text{，}t>0$$

邊界條件：$u(0,t)=u(1,t)=0$，$t>0$

初值條件：$u(x,0)=x(1-x)$，$0<x<1$

試題隨卷繳回