

1.  $(x^4 + y^4)dx - xy^3dy = 0$  (10 分)      2. 解  $y'' + 4y = x^2 \sin 2x$  (10 分)

3. 解  $x^4 y'' + 2x^3 y' + y = 2 + \frac{1}{x^2}$  (10 分)      4. 求解  $\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 + e^{-t} / (1+t^2) \\ x_2' = 2x_1 - 2x_2 + 2e^{-t} / (1+t^2) \end{cases}$  (10 分)

5. 解  $xy'' + y' - y = 0$  (10 分)

6. 有三個常態分配的隨機變數  $x_1$ 、 $x_2$  及  $x_3$ ，其變異數-共變異數矩陣

(variance-covariance matrix) 為  $\begin{pmatrix} 0.04 & 0.03 & 0.006 \\ 0.03 & 0.09 & 0.012 \\ 0.006 & 0.012 & 0.01 \end{pmatrix}$ ，請用三個 i.i.d.(independent and

identically distributed) 的標準常態分配的隨機變數  $\varepsilon_1$ 、 $\varepsilon_2$  及  $\varepsilon_3$  來組成  $x_1$ 、 $x_2$  及  $x_3$  (10 分)

7. 假設我們有三個資產，現在的單位價格矩陣為  $\begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ ，未來景氣佳、持平、差時其單位價格矩陣分別為  $\begin{bmatrix} 1 & 12 & 6 \end{bmatrix}$ 、 $\begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ 、 $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ ，

(1) 試解出一個投資組合使得投資組合在未來景氣佳、持平、差時的價值為  $[0 \ 1 \ 0]$  (4 分)

(2) 現在市場上有一個選擇權可以讓投資人有權力在未來可以用 14 的價格同時買進三個資產各一單位，投資人可以選擇是否要執行或放棄此項權力，請問在合理的條件(市場無套利的機會)下此選擇權現在的市價應該是多少?(提示:找出一個投資組合來複製此選擇權未來的價值) (6 分)

8. Let  $A$  and  $B$  be  $n \times n$  matrices. Which of the following statements are true? If it is true, prove it. If it is wrong, give a counter example to explain it.

(a) If  $A$  and  $B$  are real symmetric matrices, then  $AB$  and  $BA$  must have the same eigenvalues. (6 分)

(b) If  $B$  is invertible, then  $AB$  and  $BA$  must have the same eigenvalues. (6 分)

(c) If  $A$  and  $B$  are diagonalizable and have the same eigenvalues, then they must be the same matrix. (6 分)

9. Let  $A$  be an  $n \times n$  matrix. If all entries of  $A$  and  $A^{-1}$  are integers, show that  $\det(A^4) = 1$ . (6 分)

10. Let  $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$ . Calculate  $A^{11}$ . (6 分)