I、填充題　（每格 2 分，共 50 分。請按空格編號，依序作答。若沒有適當答案，請填寫 無解 。）

- 設甲、乙兩獨立投資方案的報酬皆為卡方隨機變數，即甲方案之報酬 $X_1 \sim \chi^2$(自由度 $v_1 = 2$)、乙方案之報酬 $X_2 \sim \chi^2$(自由度 $v_2 = 8$)。
  - 可求得 X_1 分配之動差法的偏態係數 $\beta_1 =$ __(1)__，峰態係數 $\beta_2 =$ __(2)__ > 3 而知 X_1 分配的峰態為高狹峰。
  - 今為研究需要而令新隨機變數 $Y = \dfrac{X_1}{X_1 + X_2}$，則可求得 Y 分配的期望值 $E(Y) =$ __(3)__，變異數 $V(Y) =$ __(4)__，二級原動差 $\mu_2' = E(Y^2) =$ __(5)__。
- 欲探討 A、B 行業廣告費的差異，乃隨機抽訪 A、B 行業各 21 家廠商，得去年廣告費的樣本資料為：
  A 行業：平均數 $\overline{X}_A = 78$，變異數 $S_A^2 = 121$　　B 行業：平均數 $\overline{X}_B = 66$，變異數 $S_B^2 = 110$
  假設去年 A、B 行業之廠商的廣告費分配皆為常態分配，試以顯著水準 $\alpha = 0.05$，
  - 檢定 A 行業所有廠商去年廣告費分配的變異數 σ_A^2 是否為 B 行業之 σ_B^2 的 1.1 倍？
    檢定統計量 $F =$ __(6)__ 與臨界值 2.4645 作比較，而不拒絕虛無假設 H_0 : __(7)__。
  - 檢定 A 行業所有廠商去年的平均廣告費 μ_A 是否為 B 行業之 μ_B 的 1.1 倍？
    檢定統計量 $t =$ __(8)__ 與臨界值比較而不拒絕 H_0 : __(9)__。檢定所需之自由度 $v =$ __(10)__。
- 為探討 A、B、C 三種($k = 3$)不同包裝商品對銷售量的影響，乃隨機抽出五家($n = 5$)超商，進行集區實驗設計，得各種不同包裝商品在五家超商的銷售量排名分別為：

超商	甲	乙	丙	丁	戊
A	1	1	1	1	1
B	2	2	2	2	2
C	3	3	3	3	3

  - 試以顯著水準 $\alpha = 0.05$ 檢定，A、B、C 包裝商品的銷售量中位數 η_A、η_B、η_C 是否相等？
    Friedman 檢定統計量 $\chi_r^2 =$ __(11)__ 與臨界值 6.2 作比較，而拒絕虛無假設 H_0 : __(12)__。
  - 若依據二因子分類變異數分析法之已解釋變異(處理變異) SSR、總變異 SST 的定義，可求得 SSR = __(13)__，SST = __(14)__，而能驗證 Friedman 檢定統計量 χ_r^2 與 k、n、SSR、SST 的關係公式為：__(15)__。
- 為研究需要而隨機抽查二十五家商店，得其廣告費 X 與銷貨額 Y 的樣本資料如下：
  迴歸變異 $SSR(X) = 2960$　殘差變異 $SSE(X) = 265$　廣告費之平均數 $\overline{X} = 16.20$ 及變異數 $S_X^2 = 72.25$
  - 可求得廣告費 X 與銷貨額 Y 為正的 Pearson 積差相關係數 $r =$ __(16)__，迴歸係數 $b_1 =$ __(17)__。
  - 試以顯著水準 $\alpha = 0.05$ 檢定，所有商店之廣告費與銷貨額是否有正相關，即相關係數 $\rho > 0$？
    檢定統計量 $t =$ __(18)__ 與臨界值 1.714 作比較，而拒絕虛無假設 H_0 : __(19)__。此 t 檢定所需之自由度 $v =$ __(20)__。
- 為探究甲行業各廠家營收的機率模型，乃隨機抽查 50 家廠商，得去年各廠商營收的次數分配表(依十分位數分割)為：

營收	家數	營收	家數
23.95 以下	8	33.34~35.44	6
23.95~26.94	6	35.44~37.80	1
26.94~29.24	3	37.80~40.68	5
29.24~31.31	6	40.68~44.90	3
31.31~33.34	5	44.90 以上	7

  - 試以顯著水準 $\alpha = 0.05$ 檢定，各廠商營收分配是否符合母數(自由度) $v = 34$ 的卡方機率模型？
    卡方檢定：檢定統計量 $\chi^2 =$ __(21)__ 與臨界值 16.919 作比較，而不拒絕虛無假設 H_0 : __(22)__。
    Kolmogorov-Smirnov 檢定：檢定統計量 $D =$ __(23)__ 與 0.18841 作比較，亦不拒絕虛無假設 H_0。
  - 令廠商去年營收超過 44.90 以上者所佔的比例為 p，$p > 0.2$？試以顯著水準 $\alpha = 0.05$ 檢定之。
    檢定統計量 $Z =$ __(24)__ 與臨界值 1.645 作比較，而不拒絕虛無假設 H_0 : __(25)__。

見背面

II、問答與計算題　（共 50 分）

1. 令$\{X_i\}_1^5 \overset{\text{i.i.d.}}{\sim}$ Exp (1)表示一組來自指數分配(參數為 1)之隨機樣本，令$Y_1 = \min_{1\le i\le 5} X_i$，$Y_5 = \max_{1\le i\le 5} X_i$。
   (1) 試分別推導(derive) Y_1與Y_5之機率密度函數(probability density function)。(6 分)
   (2) 計算Y_1之期望值$E(Y_1)$及標準差$\sigma(Y_1)$。(6 分)
   (3) 計算$P\{|Y_1 - E(Y_1)| \le 1\}$之機率下界值。(8 分)

2. 設$\{X_i\}_1^n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim}$ Poisson(λ)為一組抽自卜瓦松分配之隨機樣本，
   (1) 設參數λ未知，試寫出 (i)λ之含意，(ii)參數空間。(2 分)
   (2) 求λ之充分統計量 S，並驗證 S 確實具充分性(sufficiency)。(5 分)
   (3) 試 (i)計算參數$E(X_i^2)$之最大概似估計元(*maximum likelihood estimator*)，記為 T，(ii)並說明 T 之漸近分配(asymptotic distribution)（需註明分配名稱及參數）。(8 分)

3. 設$X \sim N(0,\sigma^2)$為單一(single)隨機樣本。
   (1) 試以此 X，找出σ^2之某一不偏估計元(unbiased estimator)。(4 分)
   (2) 以顯著水準α，檢定虛無假設$H_0: \sigma = 1$ vs. 對立假設$H_1: \sigma = 2$，試推導一最佳拒絕域(the best critical region)之檢定。(6 分)
   (3) 試說明於 (2)中所求之檢定，具有何種好的性質？試述此性質所依據之引理(lemma)名稱及其內容。(5 分)