

1. (20%) 已知一 3×3 矩陣 $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & 4 \\ -4 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ ，請問 (a) 行列式 $\det A = |A| = ?$ (b) 反

矩陣 $A^{-1} = ?$ (c) 特徵值 (eigenvalues)? (d) 特徵向量 (eigenvectors)?

2. (20%) 考慮週期函數 $f(x) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ ，計算 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的傅立葉級數 (Fourier series)?

3. 常微分方程式 $y'' + 4y = x + 2e^{-2x}$
- (a) (10%) 請找出它的均值解 (homogeneous solution)。
- (b) (10%) 請找出它的一般解 (general solution)。

4. 請推導下列向量關係式 (A, B 為向量)。
- (a) (10%) $\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$
- (b) (10%) $\nabla \times (A \times B) = (B \cdot \nabla)A - (A \cdot \nabla)B + (\nabla \cdot B)A - (\nabla \cdot A)B$

5. (20%) 求解下列偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < 2\pi, t > 0$$

邊界與初始條件為

$$u(x, 0) = x(2\pi - x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(2\pi, t) = 0, t > 0$$

試題隨卷繳回