1. （35 分）假設標準化尿酸值（以x表示）引起糖尿病的危險性（機率，以y表示）可以用下列數學函數來表示：

$$\mathrm{logit}(y) = 0.69x + 0.31 \text{ -------------------------------------- } (1^*)$$

若定義$\mathrm{logit}(y) = ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$，$ln$是以$e$為底的自然對數，且 $0 \le y \le 1$

（$e^1 \cong 2.72,\ e^{0.69} \cong 2.0, e^{0.31} \cong 1.36$）

(1) （3 分）寫出在 $x = 1$ 之下得糖尿病危險性（機率）y 之計算式及其值 ＿＿＿＿＿。

(2) （3 分）寫出在 $x = 1$ 之下得糖尿病之勝算($\mathrm{Odds} = \frac{y}{1-y}$)之值＿＿＿＿＿。

(3) （3 分）寫出 $x = 1$ 相對於 $x = 0$ 之下，得糖尿病之勝算比(Odds Ratio $= \frac{y_{x=1}/(1-y_{x=1})}{y_{x=0}/(1-y_{x=0})}$) 之計算式及值。＿＿＿＿＿〔$y_{x=1}$表示在$x = 1$之下 y 之值〕

(4) （5 分）假設今有 6 位個案，其x值皆相同，其中 3 位為糖尿病病人，另 3 位為非糖尿病病人，若將 6 位個案以上述式(1*)數學函數在假設糖尿病之危險性互相獨立之假設下，將個別結果機率相乘（$y^3(1-y)^3$）再取log_e（亦即ln），得到函數 $G(x)$，導演$\frac{d}{d\beta}G(x)$之算式及$x = 1$且β估計值為 0.69 之數值＿＿＿＿＿。

(5) （5 分）延續上題(4)導演$\frac{d^2}{d\beta^2}G(x)$之算式及$x = 1$且β估計值為 0.69 之數值 ＿＿＿＿＿。

(6) （3 分） 假設在另一研究中隨機抽取兩位受試者，其中一位為糖尿病病人（A），而另一位為非糖尿病病人（B），其x值皆相同，以上述數學式(1*)，寫出兩位其糖尿病結果各別機率$\big(y(1-y)\big)$乘積之算式（以$F(x)$表示）。

＿＿＿＿＿

(7) （13 分）導演上述 $F(x)$ 之積分式，並利用積分式求 x 積分範圍由 0 至 1 之值。＿＿＿＿＿

見背面

2. (20 分) 令 3 維空間中之兩個向量 $\mathbf{x1}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，和 $\mathbf{x2}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$。設 $\mathbf{v}$ 為此 3 維空間中之任一向量，試求一矩陣 $\mathbf{M}$ 滿足 $\mathbf{Mv}$ 必落於 $\mathbf{x1}$ 和 $\mathbf{x2}$ 所構成的平面上，並說明其原理。

3. (25 分) 矩陣 $A=\begin{bmatrix}4&3&0&0&0\\-2&-1&0&0&0\\5&8&10&1&-7\\20&-1&0&5&0\\-1&2&6&-4&-3\end{bmatrix}$，請求出矩陣 A 的

(1) (5 分) 跡(trace)。

(2) (10 分) 行列式(determinant)。

(3) (10 分) 所有的特徵值(eigenvalues)。

4. (20 分) 請求出以下四小題的答案：

(1) (5 分) $\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{8}\right)dx=$________。

(2) (5 分) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n=$________。

(3) (5 分) $\int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx=$________。

(4) (5 分) 若 $f(x)=2^x+x^2+x^{1/x}$，請求出 $f(x)$ 一階微分後代入 2 的值，亦即 $f'(2)=$________。

試題隨卷繳回