

請寫出您的詳細計算過程。

1. (a) 請計算矩陣  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & -2 & -3 \end{bmatrix}$  的行列式值  $\det A = |A|$ 。(5%)

(b) 請說明矩陣  $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$  的逆矩陣  $B^{-1}$  存在，並求出  $B^{-1}$ 。(10%)

2. 求線積分  $\oint_{\gamma} y^2 dx + x^2 dy$ ，其中封閉曲線  $\gamma$  為圓  $x^2 + y^2 = 1$  且為逆時針方向。  
(10%)

3. 求常微分方程式  $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = t + e^t$  之一般解。(20%)

4. 求微分方程組  $\frac{dx}{dt} = 6x - 2y$ ,  $\frac{dy}{dt} = 2x + y$  之一般解。(15%)

5. 設  $f(x) = x + x^2$ ,  $-\pi \leq x \leq \pi$ ，試計算  $f$  的 Fourier 級數。(20%)

6. 請利用分離變數法 (separation of variables) 解下列偏微分方程。(20%)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ for } 0 < x < \pi, t > 0$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \text{ for } t \geq 0$$

$$u(x, 0) = \sin x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sin 2x \text{ for } 0 \leq x \leq \pi$$

試題隨卷繳回