

I. 統計個案分析 (共 50 分)

芳緣地區神奇寶貝中心調查皮卡丘族群的分布，隨機蒐集到 30 隻皮卡丘的資料(依性別與年齡分組)如下表。大木博士依據實驗過程，欲逐步檢驗 10 個統計問題。請幫大木博士依序回答下列問題(請附上計算過程，每題 5 分)。

年齡	1 歲	2 歲	3 歲	4 歲	5 歲	6 歲
性別- 公	4	4	2	2	1	0
性別- 母	3	3	6	3	1	1

1. 假設抽樣資料接近母體分配，令性別為  $X$  變數(1 為公, 0 為母)，年齡為  $Y$  變數。請求解條件期望值  $E(Y|X)$ 。
2. 假設抽樣資料接近母體分配，令性別為  $X$  變數(1 為公, 0 為母)，年齡為  $Y$  變數。請求解  $E[E(Y|X)]$ 。
3. 每一隻皮卡丘的性別為白努利分配，在中央極限定理成立的假設下，請檢定虛無假說  $H_0: P_Y(\text{公})=P_Y(\text{母})$ ，表示皮卡丘族群公、母比例相同。
4. 若隨機抽樣樣本為 *i.i.d.*，在卡方檢定下，檢定  $XY$  獨立性的卡方統計量為何？將卡方檢定應用在這個研究的可能問題為何？(3+2 分)
5. 在 ANOVA 下，建立虛無假說  $H_0: \mu_Y(\text{公})=\mu_Y(\text{母})$ ，表示公和母的皮卡丘平均年齡相同。請計算 ANOVA 的  $F$  統計量。
6. 建立迴歸式  $Y=a+bX+e$ ，請求解迴歸係數  $b$  與斜率變異數  $Var(b)$  (2+3 分)。
7. 承上題。大木博士建立虛無假說  $H_0: b=0$ ，如果真實的斜率為  $\beta$ ，依照第 6 題答案(假設母體變異數等於  $Var(b)$ )，請找出在  $\alpha=5\%$  之下  $b$  的檢定力函數( $t_{\alpha=0.025}$  臨界值為 2.05)。
8. 根據 1.5 interquartile range 的原則，年齡( $Y$  變數)是否存在極端值問題？
9. 大木博士蒐集更多資料之後，請小剛用複迴歸分析皮卡丘體重( $W$ )和年齡、性別的關係，建立模型  $W=a+bX+cY+u$ ，得到迴歸估計結果表格如下。但是小剛忘記說明括號中數值為何，請你判斷迴歸結果，並幫大木博士分析各解釋變數的統計顯著性。

	模型一	模型二	模型三
截距項	5.12 (3.45)	5.32 (3.00)	5.66 (3.31)
年齡( $Y$ )	1.21 (0.81)		0.21 (0.34)
性別( $X$ )		-1.12 (0.25)	-0.43 (0.78)
年齡 x 性別 ( $XY$ )			1.12 (0.99)
N	30	30	30
判定係數	0.33	0.43	0.98

10. 在模型三中，小剛加入了年齡和性別的交乘項。有統計學家認為模型三的估計可能有不恰當之處，請解釋該模型估計上的可能問題為何，並提出理由(2+3 分)。

II. 問答與計算題 (共 50 分)

1. 若一電路系統由三個電池  $\{C_i\}_1^3$  所組成，設  $X_i$  為  $C_i$  之壽命(以小時計)，且  $\{X_i\}_1^3 \sim \text{Exp}(\lambda=1)$  為獨立同態的指數分配。

(1) 若此系統為串聯，試推導此電路系統壽命分配(life distribution)之機率密度函數(pdf)，並註明

分配名稱與參數。(5分)

(2) 若此系統改為並聯，試計算此系統壽命超過一小時之機率。(5分)

(3) 令  $S = \sum_{i=1}^3 X_i$ ，表示此三個電池之總壽命，試計算  $S$  之動差母函數(mgf)，並計算  $E(S)$  及  $Var(S)$ 。

(10分)

2. 設  $\{X_i\}_1^n \stackrel{i.i.d.}{\sim} U(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$  為一組來自均勻分配之隨機樣本，

(1) 試寫出  $(\mu, \sigma)$  之參數空間。(5分)

(2) 求  $(\mu, \sigma)$  之動差估計元，記為  $(\hat{\mu}_{MME}, \hat{\sigma}_{MME})$ 。(10分)

3. 設  $\{X_i, Y_i\}_1^5 \stackrel{i.i.d.}{\sim} BVN(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$  為一組來自二元常態之隨機樣本，且此五個參數皆未知，

(1) 試求此五個參數之聯合充分統計量。(5分)

(2) 試推導參數  $(\mu_1 - \mu_2)$  之 95% 信賴區間，並說明其含義。(5分)

(3) 給  $\alpha=0.05$ ，可否以(2)之結果作  $H_0: \mu_1 = \mu_2$  vs.  $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$  之檢定？需說明判定  $H_0$  被接受或  $H_0$  被拒之方法。(5分)

試題隨卷繳回